线性代数　中国科学技术大学 2023 春
向量与数域

主讲: 杨金榜
地空楼 525
助教: 苏煜庭、陈鉴、夏小凡

2023 年 3 月 9 号

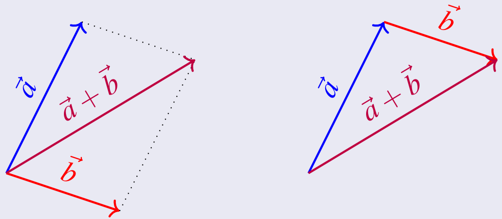
什么是线性代数 (linear algebra)?

线性代数是关于向量空间和线性映射的一个数学分支。

——维基百科

向量 = 既有<u>大小</u>, 又有<u>方向</u> 的量.

定义 (向量的加法—平行四边形法则或者三角形法则)



定义 (向量的减法)

$$\vec{a}-\vec{b}:=\vec{a}+(-\vec{b}).$$

定义 (向量的数乘)

令 $\vec{a}$ 为一向量, λ 为一实数.

- 若 $\lambda \geq 0$, 则 $\lambda\vec{a}$ 定义为长度为 $\lambda|\vec{a}|$ 且方向与 $\vec{a}$ 相同的向量.
- 若 $\lambda < 0$, 则 $\lambda\vec{a}$ 定义为长度为 $-\lambda|\vec{a}|$ 且方向与 $\vec{a}$ 相反的向量.

性质 (向量集合上线性运算的八条基本性质)

1. 加法交换律: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;
2. 加法结合律: $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$;
3. 存在零元: $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}=\vec{0}+\vec{a}$;
4. 存在负元: $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}=(-\vec{a})+\vec{a}$;
5. 数乘单位元: $1\vec{a}=\vec{a}$;
6. 数乘结合律: $\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$;
7. 左分配律: $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$;
8. 右分配律: $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$;

注：我们将通过这八条性质来公理化地定义一般的线性空间或向量空间 (第五章).

线性组合

定义 (线性组合)

设 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$ 为一组向量, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 为一组实数. 称向量

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \cdots \lambda_m\vec{a}_m$$

为向量 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$ 的线性组合.

也就是说, 一组向量的线性组合就是从这组向量出发通过线性运算能够获得的向量.

定义 (线性相关, 线性无关)

给定一组向量 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$.

- 如果存在一组不全为零的实数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 使得
$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \cdots \lambda_m\vec{a}_m = 0,$$
则称向量组 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$线性相关.
- 反之, 若对任意一组不全为零的实数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 都有
$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \cdots \lambda_m\vec{a}_m \neq 0,$$
则称向量组 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$ 的线性无关.

1. 一个向量 $\vec{a}$ 线性相关 $\iff$ $\vec{a} = 0$;
2. 两个向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 线性相关 $\iff$ $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 平行 (共线);
3. 三个向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 线性相关 $\iff$ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 共面;
4. 四个及四个以上的向量一定线性相关.

定理 (向量的基本定理)

设 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ 为空间中的三个不共面的向量, 则对每个向量 $\vec{a}$ 都存在唯一的三元有序实数组 (x_1, x_2, x_3), 使得

$$\vec{a} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3.$$

定义 (基、坐标)

称不共面的三个向量 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ 为一组基. 若

$$\vec{a} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3,$$

则称 (x_1, x_2, x_3) 为向量 $\vec{a}$ 在基 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ 下的(仿射) 坐标.

仿射坐标系 = 点O + 基$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$　　记作$[O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3]$.

推论 (一一对应)

若给定仿射坐标系 $[O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3]$, 则有如下一一对应

$$\text{空间} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \text{全体向量集} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$$

$$P \longmapsto \overrightarrow{OP} \longmapsto \text{坐标}(x_1,x_2,x_3)$$

给定仿射坐标系 $[O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3]$, 我们用 (x_1,x_2,x_3) 表示向量 $x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+x_3\vec{e}_3$. 则我们有

性质

- $(x_1,x_2,x_3)+(y_1,y_2,y_3)=(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3)$;
- $\lambda(x_1,x_2,x_3)=(\lambda x_1,\lambda x_2,\lambda x_3)$.

坐标变换

给定两个仿射坐标系 $[O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3]$ 和 $[O';\vec{e}'_1,\vec{e}'_2,\vec{e}'_3]$.

问题

设空间中的点 P 在两个坐标系下的坐标分别为 (x,y,z) 和 (x',y',z'). 求两个坐标之间的关系式?

为了回答这一问题，我们需要给出两个坐标系之间的位置关系:

- 设 O 在 $[O';\vec{e}'_1,\vec{e}'_2,\vec{e}'_3]$ 下的坐标为 (x'_0,y'_0,z'_0). 即

$$\overrightarrow{O'O} = x_0\vec{e}'_1 + y_0\vec{e}'_2 + z_0\vec{e}'_3.$$

- 设 $\vec{e}_j$ 在基 $\vec{e}'_1,\vec{e}'_2,\vec{e}'_3$ 下的坐标为 (a_{1j},a_{2j},a_{3j}). 即

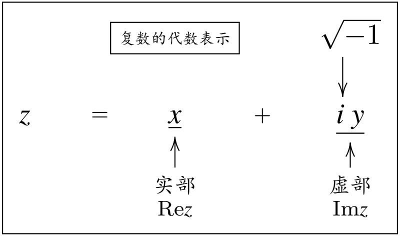
$$\vec{e}_j = a_{1j}\vec{e}'_1 + a_{2j}\vec{e}'_2 + a_{3j}\vec{e}'_3.$$

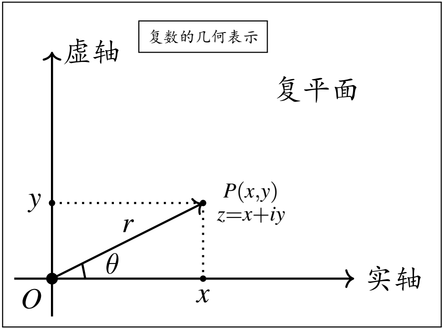
然后 P 在两个坐标系下的坐标之间的关系式可写为:

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + x'_0 \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + y'_0 \\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + z'_0 \end{aligned}}$$

$pf: \overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP}.$

复数





- 模长:
  $|z| := |\overrightarrow{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2}$;
- 辐角: 实轴沿逆时针方向旋转到 $\overrightarrow{OP}$ 的角度.
- 共轭: $\bar{z} := x - iy$.
- 三角表示:
  $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

设 $\omega = a + ib = t(\cos\varphi + i\sin\varphi)$。任取复平面中的点 $z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)$，则根据复数的乘法和积化和差公式

$$\omega \cdot z = (ax - by) + i(bx + ay) = rt(\cos(\theta + \varphi) + i\sin(\theta + \varphi)).$$

- 若用坐标表示复数, 则乘复数 ω 给出如下复平面的变换:

$$(x, y) \mapsto (ax - by, bx + ay).$$

- 若用极坐标表示复数，则乘复数 ω 有如下几何解释:

$$z \xrightarrow{\text{伸缩 } t \text{ 倍}} tz \xrightarrow{\text{逆时针旋转 } \varphi \text{ 角度}} \omega z.$$

复数域的任意子集称为数集. 例如: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \cdots$.

定义

若数集 $\mathbb{F}$ 至少包含两个元素, 且关于数的加减乘除封闭, 那么称 $\mathbb{F}$ 为数域.

例如:$\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ 不为数域. 而 $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ 均为数域.

例

数集 $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ 为一个数域.

性质

有理数域 $\mathbb{Q}$ 为最小的数域. 即, 若 $\mathbb{F}$ 为数域, 则 $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{F}$.

高维数组向量的定义

设 $\mathbb{F}$ 为数域, n 为正整数.

定义

我们称一个由 n 个 $\mathbb{F}$ 上的数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 组成的有序数组

$$\vec{a} := (a_1, \cdots, a_n)$$

为数域 $\mathbb{F}$ 上的一个 n 维数组向量. 其中 a_i 称为 $\vec{a}$ 的第 i 个分量. 数域 $\mathbb{F}$ 上 n 维数组向量全体记为 $\mathbb{F}^n$.

记法:

行向量: $\vec{a} = (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{F}^n$ 列向量: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n$

高维数组向量的线性运算

设 $\vec{a}=(a_1,\cdots,a_n)\in\mathbb{F}^n$, $\vec{b}=(b_1,\cdots,b_n)\in\mathbb{F}^n$, $\lambda\in\mathbb{F}$.

- 加法: $\vec{a}+\vec{b}:=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)$.
- 数乘: $\lambda\vec{a}:=(\lambda a_1,\lambda a_2,\cdots,\lambda a_n)$.
- 零向量: $\vec{0}:=(0,\cdots,0)$.
- 负向量: $-\vec{a}:=(-a_1,\cdots,-a_n)$.
- 相等: $\vec{a}=\vec{b}\iff a_i=b_i\quad i=1,\cdots,n$.

八条基本性质:

1. 加法交换律: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;
2. 加法结合律: $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$;
3. 存在零元: $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}=\vec{0}+\vec{a}$;
4. 存在负元: $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}=(-\vec{a})+\vec{a}$;
5. 数乘单位元: $1\vec{a}=\vec{a}$;
6. 数乘结合律: $\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$;
7. 左分配律: $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$;
8. 右分配律: $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$;

设 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n \in \mathbb{F}^n$, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m \in \mathbb{F}$.

$$\boxed{\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \cdots \lambda_m\vec{a}_m \qquad \longleftarrow \text{线性组合}}$$

定义 (线性相关, 线性无关)

一组向量 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$ 称为线性相关, 若存在一组不全为零的实数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 使得

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \cdots \lambda_m\vec{a}_m = 0.$$

反之, 则称向量 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$ 的线性无关.

例

记 $\vec{e}_1=(1,0,\cdots,0), \vec{e}_2=(0,1,\cdots,0), \cdots, \vec{e}_n=(0,0,\cdots,1)$. 则 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n$ 线性无关. 称这 n 个向量为基本向量.

事实

基本向量线性无关，且任意 n 维数组向量都可以表示为基本向量的线性组合.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n.$$

求和号

$$\sum_{i=1}^{n} a_i := a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

性质

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i; \qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda a_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i$$

多重求和号

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij} := \sum_{j=1}^{m}(a_{1j} + a_{2j} + \cdots + a_{nj})$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} := \sum_{i=1}^{n}(a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{im})$$

性质

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}.$$

有时候, 将这一值简记为 $\sum\limits_{1\le i,j\le n} a_{ij}$.

条件求和

$$\sum_{1\le i\le j\le n} a_{ij} := a_{11} + (a_{12}+a_{22}) + \cdots + (a_{1n}+a_{2n}+\cdots+a_{nn}).$$

性质

$$\sum_{1\le i\le j\le n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{ij}.$$

例

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m} b_j\right).$$

研究对象

1. 小学 (鸡兔同笼)

   今有雉兔同笼，
   上有三十五头，
   下有九十四足，
   问雉兔各几何？

2. 初中 (二元一次方程组)

$$\begin{cases} x + y = 35 \\ 2x + 4y = 94 \end{cases}$$

3. 现在 (线性方程组：即, 任意个变量及任意个方程构成的一次方程组.)

线性方程组

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right. \qquad (*)$$

1. x_j: 第 j 个变量
2. a_{ij}: 第 i 个方程第 j 个变量 x_j 的系数;
3. b_i: 第 i 个方程的常数项.
4. 如果 $b_1 = \cdots = b_m = 0$, 则称方程组$(*)$为齐次线性方程组。否则称之为非齐次线性方程组。

例

$$\left\{\begin{array}{l} x+\ \ y=0 \\ 2x+4y=0 \end{array}\right. \text{(齐次)} \qquad \left\{\begin{array}{l} x+\ \ y=35 \\ 2x+4y=94 \end{array}\right. \text{(非齐次)}$$

线性方程组的解

1. 令 $c_1, \cdots, c_n$ 为一组数。若将 $x_1 = c_1$，$\cdots$，$x_n = c_n$ 代入方程组(∗)，等式都成立，则称 $(c_1, \cdots, c_n)$ 为一组解。称有所有解组成的集合为解集。
2. 如果解集非空，我们称方程组(∗)是相容的，否则称之为不相容的。

例

线性方程组 $\begin{cases} x + y = 35 \\ 2x + 4y = 94 \end{cases}$ 是相容，因为二元数组 $(23, 12)$ 为它的一组解。通过初等计验证算，可以得出这一方程组的解集正好为 $\{(23, 12)\}$.

1. 解是否存在，是否唯一？
2. 如何求解？
3. 解集的公式表达。
4. 解集的几何结构。

注：

- 前两个问题可以用Gauss 消元法解决 (本次课的主要内容)。
- 后两个问题需要用矩阵、行列式和线性空间等基本工具与研究对象 (第四五章的主要内容)。

例 (鸡兔同笼)

求解 $\begin{cases} x + y = 35 & (1) \\ 2x + 4y = 94 & (2) \end{cases}$.

解：第一步, 方程 (2) 减去两倍的方程 (1) 得

$$\xrightarrow{-2(1)\to(2)} \begin{cases} x + y = 35 & (3) \\ 2y = 24 & (4) \end{cases}$$

第二步, 方程 (4) 除以 2

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}(4)} \begin{cases} x + y = 35 & (5) \\ y = 12 & (6) \end{cases}$$

第三步. 方程 (5) 减去方程 (6)

$$\xrightarrow{-(6)\to(5)} \begin{cases} x = 23 \\ y = 12 \end{cases}$$

例

求解 $\left\{\begin{array}{rcrcrcll} 3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 6 & (1) \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 9 & (2) \\ 2x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 & = & 3 & (3) \end{array}\right.$.

解：交换前两个方程的顺序

$$\xrightarrow{(1)\leftrightarrow(2)} \left\{\begin{array}{rrrcrl} x_1 & +3x_2 & +2x_3 & = & 9 & (4) \\ 3x_1 & +2x_2 & -x_3 & = & 6 & (5) \\ 2x_1 & -x_2 & -3x_3 & = & 3 & (6) \end{array}\right.$$

$$\xrightarrow[-2(4)\to(6)]{-3(4)\to(5)} \left\{\begin{array}{rrrcrl} x_1 & +3x_2 & +2x_3 & = & 9 & (7) \\ & -7x_2 & -7x_3 & = & -21 & (8) \\ & -7x_2 & -x_3 & = & -15 & (9) \end{array}\right.$$

$$\xrightarrow{-(8)\to(9)} \left\{\begin{array}{rrrcrl} x_1 & +3x_2 & +2x_3 & = & 9 & (10) \\ & -7x_2 & -7x_3 & = & -21 & (11) \\ & & 6x_3 & = & 6 & (12) \end{array}\right.$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{6}(12)}\begin{cases}x_1 & +3x_2 & +2x_3 & = & 9 & (13)\\ & -7x_2 & -7x_3 & = & -21 & (14)\\ & & x_3 & = & 1 & (15)\end{cases}$$

$$\xrightarrow{7(15)\to(14)}\begin{cases}x_1 & +3x_2 & +2x_3 & = & 9 & (16)\\ & -7x_2 & & = & -14 & (17)\\ & & x_3 & = & 1 & (18)\end{cases}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{7}(14)}\begin{cases}x_1 & +3x_2 & +2x_3 & = & 9 & (19)\\ & x_2 & & = & 2 & (20)\\ & & x_3 & = & 1 & (21)\end{cases}$$

$$\xrightarrow[-2(21)\to(19)]{-3(20)\to(19)}\begin{cases}x_1 = & 1\\ x_2 = & 2\\ x_3 = & 1\end{cases}\text{（代回验证，成立）}\Rightarrow \text{解集为}\ \{(1,2,1)\}.$$

方程的三种初等变换

	初等变换	记号
(1)	交换两个方程	$(i) \leftrightarrow (j)$
(2)	某个方程乘以一个非零常数	$\lambda(i)$
(3)	某个方程成一个常数加到另一个方程上	$\lambda(i) \rightarrow (j)$

例 (存在不唯一)

$$\text{求解}\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3 & (1) \\ x_1 + 2x_2 \qquad\quad - 5x_4 = 1 & (2) \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 19x_4 = 6 & (3) \\ 3x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 24x_4 = 7 & (4) \end{cases}$$

解：

$$\xrightarrow[-3(1)\to(4)]{\substack{-1(1)\to(2)\\-2(1)\to(3)}}\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 & (5) \\ \qquad -3x_3 - 9x_4 = 4 & (6) \\ \qquad -9x_3 - 27x_4 = 12 & (7) \\ \qquad -12x_3 - 36x_4 = 16 & (8) \end{cases}$$

$$\xrightarrow[-4(6)\to(8)]{\substack{(6)\to(5)\\-3(6)\to(7)}}\begin{cases} x_1 + 2x_2 \qquad - 5x_4 = -3 & (9) \\ \qquad -3x_3 - 9x_4 = 4 & (10) \\ \qquad 0 = 0 & (11) \\ \qquad 0 = 0 & (12) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{3}(10)}\begin{cases} x_1 + 2x_2 \qquad - 5x_4 = 1 & (13) \\ \qquad x_3 + 3x_4 = -\frac{4}{3} & (14) \\ \qquad 0 = 0 & (15) \\ \qquad 0 = 0 & (16) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - 2x_2 + 5x_4 \\ x_3 = -\frac{4}{3} - 3x_4 \end{cases}$$

因此 x_2 和 x_4 可取任意值，x_1 和 x_3 由 x_2 和 x_4 的取值唯一确定。即，

$$\begin{cases} x_1 = 1 - 2t_1 + 5t_2 \\ x_2 = t_1 \\ x_3 = -\frac{4}{3} - 3t_2 \\ x_4 = t_2 \end{cases} \qquad \text{其中} t_1, t_2 \in F.$$